Exercice 1 Soient A, B et C trois points de l'espace. Montrer que pour tout point M de l'espace:

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Exercice 2 Soient A et B deux points de l'espace et un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Exercice 3 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct, on considère les points suivants:

$$A(1, 2, -1),\ B(3, 2, 0),\ C(2, 1, -1),\ D(1, 0, 4),\ E(-1, 1, 1).$$

1) Déterminer une équation cartésienne des plans (ABC), (ADE).
2) Donner un vecteur directeur puis un paramètrage de la droite $\mathcal{D} = (ABC) \cap (ADE)$.

Exercice 4 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct on considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(-1, -3, 4)$, $C(1, 1, 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}(2, -2, 1)$.

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
3) Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AB).

Exercice 5 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct on considère les droites:

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -5 - t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont concourantes.
2) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
3) Donner alors des équations cartésiennes de chacune de ces deux droites.

Exercice 6 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct on considère les droites D_1 et D_2 d'équations respectives

$$D_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} , \quad D_2 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases} .$$

1) Déterminer la perpendiculaire commune à D_1 et D_2.
2) Déterminer la distance entre D_1 et D_2.

Exercice 7 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct on considère le point $A(-1, 1, 3)$, les droites D_1 et D_2 définies, respectivement, par la représentation paramétrique et le système d'équations cartésiennes suivantes

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}, \qquad D_2 : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Déterminer les distances $d(A, D_1)$ et $d(A, D_2)$.

Exercice 8 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct, on considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 3, 1)$, $D(3, 2, 1)$.

1) Déterminer le projeté orthogonal H de A sur le plan (BCD).

2) En déduire $d(A, (BCD))$.

Exercice 9 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct former les équations cartésiennes des plans P contenant la droite $\Delta : \begin{cases} x = 6 - 3z \\ x = 3y - 7 \end{cases}$ et situés à la distance 1 du point A de coordonées $(1, 1, 2)$.

Exercice 10 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct on considère le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 3$ et la sphère $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

1) Déterminer le centre et le rayon de la sphère $\mathcal{S}$.

2) Montrer que l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ définit un cercle $\mathcal{C}$.

3) Déterminer alors les éléments caractéristiques du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 11 Dans l'espace est rapporté à un repère orthonormal direct, on considère l'ensemble:

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0.$$

1) Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tangent à $\mathcal{S}$ au point O, l'origine du repère.